

ECHANGES D'INTERVALLES NON TOPOLOGIQUEMENT FAIBLEMENT MÉLANGEANTS

HADDA HMILI

RÉSUMÉ. Dans cet article, on prouve un critère d'existence de fonctions propres continues non constantes pour les échanges d'intervalles, c'est à dire de non mélange faible topologique. On construit pour tout entier $m > 3$ des échanges de m intervalles de rang 2 uniquement ergodiques et non topologiquement faiblement mélangeant répondant ainsi à une question de Ferenczi et Zamboni dans [4]. On construit aussi pour tout entier pair $m \geq 4$ des échanges de m intervalles possédant des valeurs propres irrationnelles (avec fonctions propres associées continues donc non topologiquement faiblement mélangeant) et possédant aussi des valeurs propres rationnelles (avec fonctions propres associées continues par morceaux) et qui sont soit uniquement ergodiques, soit non minimaux.

ABSTRACT. In this paper, we prove a criterion for existence of continuous non constant eigenfunctions for interval exchange transformations, that is for non topologically weak mixing. We first construct, for any $m > 3$, uniquely ergodic interval exchange transformations of \mathbb{Q} -rank 2 with irrational eigenvalues associated to continuous eigenfunctions, so that are not topologically weak mixing, this answers to a question of Ferenczi and Zamboni [4]. Then, we construct, for any even number $m \geq 4$, interval exchange transformations of \mathbb{Q} -rank 2 with both irrational eigenvalues (associated to continuous eigenfunctions) and non trivial rational eigenvalues (associated to piecewise continuous eigenfunctions), moreover these examples can be chosen to be either uniquely ergodic or non minimal.

HISTORIQUE

Les échanges d'intervalles ont été introduits, suivant une idée d'Arnold, par Katok et Stepin [5] qui ont utilisé les échanges de 3 intervalles pour construire des familles de transformations avec spectre continu simple. Ensuite, Keane [6] a donné un critère de minimalité pour les échanges d'intervalles : la condition idoc (voir la définition 1.6) et a construit [7] des échanges d'intervalles minimaux et non uniquement ergodiques. Veech [9] a prouvé que presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique et a posé [10] de nombreuses questions sur les propriétés spectrales réalisables

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary : 37A25, 37E05.

Key words and phrases. fonction propre, échanges d'intervalles, minimal, uniquement ergodique, faiblement mélangeant, topologiquement faiblement mélangeant.

par les échanges d'intervalles. Récemment, Avila et Forni [1] ont montré que presque tout échange d'intervalles est faiblement mélangeant, précédemment, Nogueira et Rudolph [8] avaient montré que presque tout échange d'intervalles est topologiquement faiblement mélangeant. Ici, à l'opposé du cas générique nous construisons des familles d'échanges d'intervalles avec spectre non trivial.

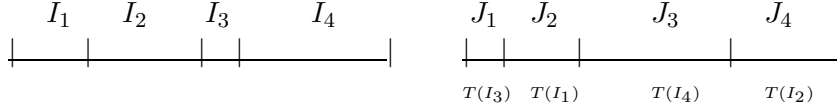
1. INTRODUCTION

Soient $r > 0$ un entier et $I^r = [0, r[$. Soit $m > 0$ un entier. On appelle *échange de m intervalles* de I^r une bijection de I^r sur I^r pour laquelle il existe une subdivision $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_m = r$ et des réels δ_i tels que $T(x) = x + \delta_i$ pour tout $x \in [a_{i-1}, a_i[$.

Le vecteur $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_m)$ est dit *vecteur de translation* de T .

On note $D(T) = \{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}$ l'ensemble des *discontinuités* de T .

On note $I_i = [a_{i-1}, a_i[$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ et $J_j = [b_{j-1}, b_j[$ les intervalles $T(I_i)$ écrits dans l'ordre. Ainsi, on associe à T une permutation π de $\{1, \dots, m\}$ par $T(I_i) = J_{\pi(i)}$.



Dans ce cas on a $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On associe à T son *vecteur longueur* noté $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)$, défini par $\lambda_i = |I_i|$ la longueur de I_i .

Le vecteur δ se déduit de λ par :

$$\delta_i = \sum_{j=1, \dots, \pi(i)} \lambda_{\pi^{-1}(j)} - \sum_{j=1, \dots, i} \lambda_j.$$

On dit que T est *minimal* si l'orbite $O_T(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ de tout point $x \in I^r$ est dense dans I^r .

Un échange d'intervalles est dit *de rang 2* si les longueurs associées λ_i appartiennent à un même \mathbb{Q} -espace vectoriel de rang 2. On peut montrer ([3]) que l'on peut toujours se ramener au cas où les λ_i appartiennent à un \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par 1 et un nombre irrationnel α . Boshernitzan a montré dans [3] :

Théorème (Boshernitzan) [3]. *Tout échange d'intervalles minimal et de rang 2 est uniquement ergodique.*

Dans ce même article, Boshernitzan pose aussi la question de la stabilité des propriétés spectrales pour les échanges d'intervalles de rang 2.

Notions spectrales.

Soit T un échange d'intervalles sur un intervalle I . On note μ la mesure de Lebesgue sur I et $L^2(I, \mu) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ telle que } \|f\|_2 = \int |f|^2 d\mu < \infty\}$.

Définition 1.1. On définit un opérateur unitaire par :

$$\begin{aligned} U_T : L^2(I, \mu) &\rightarrow L^2(I, \mu), \\ f &\mapsto f \circ T \end{aligned}$$

Cet opérateur est appelé *opérateur de composition par T* .

Soit $a \in \mathbb{C}$, une fonction $f \in L^2([0, 1[, \mu)$ est appelée *fonction propre de U_T* associée à la *valeur propre a* si $f \circ T = af$, μ -presque partout.

Remarques. Par définition, les fonctions propres de U_T associées à la valeur propre 1 sont les fonctions constantes sur les orbites de T .

Comme U_T est unitaire ($\|U_T(f)\|_2 = \|f\|_2$), les valeurs propres de U_T sont de module 1 et s'écrivent $a = \exp(2i\pi\alpha)$ avec $\alpha \in [0, 1[$.

Définition 1.2. La valeur propre a est dite *rationnelle* [resp. *irrationnelle*] si α est rationnel [resp. irrationnel].

Définition 1.3. Soit T un échange d'intervalles.

- On dit que T est *ergodique* par rapport à la mesure de Lebesgue μ si les ensembles T -invariants sont de μ -mesure pleine ou nulle.
- T est dit *C^0 -ergodique* si les fonctions propres continues de U_T associées à la valeur propre 1 sont les constantes.
- On dit que T est *uniquement ergodique* si la mesure μ est la seule mesure de probabilité T -invariante.
- T est dit *faiblement mélangeant* si les fonctions propres dans $L^2(I, \mu)$ de U_T sont les constantes.
- T est *topologiquement faiblement mélangeant* si les fonctions propres continues de U_T sont les constantes.

Propriétés.

- i) Si T est minimal alors T est C^0 -ergodique.
- ii) Si T est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue μ alors T est minimal et donc T est C^0 -ergodique.
- iii) Si T est uniquement ergodique alors T est ergodique par rapport à μ .
- iv) Si T est faiblement mélangeant alors T est topologiquement faiblement mélangeant. La réciproque est fausse :

En effet, soit R_α un échange de 2 intervalles avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$. On sait que les fonctions propres de U_{R_α} sont de la forme $g_k(x) = A \exp(2i\pi kx)$, $k \in \mathbb{Z}$, où A est une constante complexe. Soit h un échange de m intervalles, posons $T = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Alors T est un échange d'au plus $2m$ intervalles.

Les fonctions $f_k = g_k \circ h^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont les fonctions propres de U_T dans $L^2(I, \mu)$ et non constantes. Donc, T n'est pas faiblement mélangeant. Mais, T est topologiquement faiblement mélangeant car si f est une fonction propre continue non constante de U_T alors $f \circ h$ est une fonction propre de R_α , donc f s'écrit : $f = g_k \circ h$, pour un $k \in \mathbb{Z}^*$ qui est continue par morceaux et jamais continue dès que $m > 2$.

Questions et Résultats.

Arnoux a exhibé dans [2] un exemple non trivial d'échange de 7 intervalles qui possède une fonction propre continue non constante. De plus, Nogueira et Rudolph ont prouvé que les échanges de 3 intervalles sont topologiquement faiblement mélangeants (voir [8]). Dans le paragraphe questions de [4], S. Ferenczi et L.Q. Zamboni s'interrogent sur l'existence d'échange de 4 intervalles possédant des fonctions propres continues. Ici, nous répondons par l'affirmative à cette question en montrant les

Théorème 1.4. *Pour tout entier $m > 3$, pour tout $\beta \in [0, 1]$ irrationnel, il existe des échanges T_β de m intervalles uniquement ergodiques vérifiant la condition idoc de Keane (voir la définition 1.6) et non topologiquement faiblement mélangeant avec fonctions propres continues non constantes associées à la valeur propre $\exp(2i\pi\beta)$.*

Théorème 1.5. *Pour tout entier pair $m \geq 4$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$ irrationnel, il existe des échanges T_α de m intervalles non topologiquement faiblement mélangeants, avec fonctions propres continues non constantes associées à la valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$ et possédant aussi $\exp(4i\pi\frac{1}{m})$ comme valeur propre rationnelle. De plus, ces exemples peuvent être choisis soit uniquement ergodiques, soit non minimaux.*

Remarques. Ce dernier résultat constitue un phénomène spectral nouveau par rapport aux rotations. D'autre part, tous les exemples construits pour ces deux théorèmes sont de rang 2 ; dans la proposition 2.1 B, nous montrons que si l'on cherche des échanges d'intervalles avec fonctions propres dérivables à dérivée dans $L^2(I, \mu)$ alors nécessairement ces échanges d'intervalles sont de rang 2. Par ailleurs, nos constructions restent valables pour les valeurs rationnelles des paramètres et fournissent des valeurs propres rationnelles pour des échanges d'intervalles qui ne sont plus minimaux.

Critère de minimalité - Condition idoc de Keane.

Nous indiquons ici un critère de minimalité dû à Keane [6].

Définition 1.6. Une permutation π de $\{1, 2, \dots, m\}$ est *irréductible* si $\pi(\{1, 2, \dots, k\}) \neq \{1, 2, \dots, k\}$ pour tout $1 \leq k < m$.

On dit que T satisfait la *condition idoc* si :

- a) $O(a_i) = \{T^n(a_i) : n \in \mathbb{Z}\}$ est infini pour tout $1 \leq i < m$,
- b) $O(a_i) \cap O(a_j) = \emptyset$ pour tous $1 \leq i, j \leq m-1$, $i \neq j$.

Théorème (Keane [6]). Si T satisfait la condition idoc et π est irréductible alors T est minimal.

2. EXISTENCE DE FONCTIONS PROPRES CONTINUES

Proposition 2.1. Soit T un échange de m intervalles de I , de vecteur longueur associé $(\delta_i)_{1 \leq i \leq m}$.

A) S'il existe deux réels r et s , et des entiers p_i tels que $\delta_i = r + p_i s$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ alors T admet $f(x) = \exp(\frac{2i\pi}{s}x)$ comme fonction propre associée à la valeur propre $\exp(2i\pi \frac{r}{s})$.

B) Si T est uniquement ergodique et admet une fonction propre dérivable f dont la dérivée est dans $L^2(I, \mu)$ alors $f(x) = C \exp(2i\pi kx)$, pour un $k \in \mathbb{Z}$ et T est de rang 2.

Preuve.

A) On calcule $f \circ T$.

$$\begin{aligned} \text{On a } f \circ T(x) &= \exp(\frac{2i\pi}{s}T(x)), \text{ pour tout } x \in I_i. \\ &= \exp(\frac{2i\pi}{s}(x + \delta_i)) \\ &= \exp(\frac{2i\pi}{s}(x + r + p_i s)) \\ &= \exp(\frac{2i\pi}{s}x) \exp(2i\pi \frac{r}{s}) \exp(2i\pi p_i) \\ &= \exp(2i\pi \frac{r}{s}) f(x) \end{aligned}$$

B) Par hypothèse, on a $f \circ T = \lambda f$. Dérivons, on obtient : $f' \circ T = \lambda f'$. Puisque f n'est pas constante, il existe $x \in I$ tel que $f(x) \neq 0$. Par conséquent $f(T^n(x)) = \lambda^n f(x) \neq 0$.

Comme T est minimal, l'orbite de tout point x par T est dense. Donc $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in I$ (par continuité de f). On a alors : $\frac{f'}{f} \circ T = \frac{f'}{f}$, μ -presque partout.

Par unique ergodicité de T , on obtient : $\frac{f'}{f} = C$, où C est une constante complexe non nulle. En intégrant on obtient $f(x) = A \exp(Cx)$, pour tout $x \in I$, où A est une constante complexe non nulle.

Ainsi, $\exp(CT(x)) = \lambda \exp(Cx)$, pour tout $x \in I$. Ecrivons $\lambda = \exp(i\beta)$ et $C = a + ib$. Par conséquent, $\exp(aT(x)) = \exp(ax)$ d'où $a = 0$ et $\exp(ibT(x)) = \exp(i\beta) \exp(ibx)$ d'où $bT(x) = \beta + bx + k(x)$, avec $k(x) \in \mathbb{Z}$ et finalement $T(x) = x + \frac{\beta}{b} + \frac{k(x)}{b}$. Les δ_i sont dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par $\frac{\beta}{b}$ et $\frac{1}{b}$, donc T est de rang 2.

3. PREUVE DU THÉORÈMES 1.4

Construction des T_β : échanges de m intervalles uniquement ergodiques vérifiant la condition *idoc* de Keane et non topologiquement faiblement mélangeant.

Soit $m > 3$ un entier et $\alpha \in]0, \frac{1}{m-1}[$ un irrationnel. Soit T l'échange d'intervalles de $[0, 1[$ de permutation associée :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-2 & m-1 & m \\ m-1 & m-2 & \dots & 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

et de vecteur longueur associé :

$$\lambda = (\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m-1}, \dots, \frac{1}{m-1}, \frac{1}{m-1} - \alpha, \alpha).$$

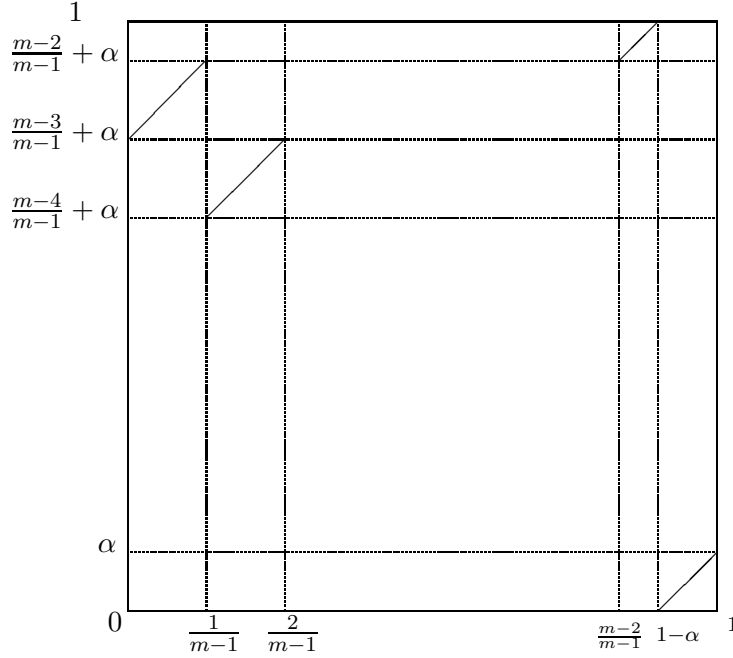


Figure 1

On détermine facilement que :

- Les discontinuités de T sont : $\frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-1}, \dots, \frac{m-2}{m-1}, 1 - \alpha$.
- Les images des discontinuités de T sont : $\frac{m-4}{m-1} + \alpha, \frac{m-5}{m-1} + \alpha, \dots, \frac{1}{m-1} + \alpha, \alpha, \frac{m-2}{m-1} + \alpha, 0$.
- Les translations de T sont :
 - $\delta_i = \frac{m-1-2i}{m-1} + \alpha$, pour $1 \leq i \leq m-2$
 - $\delta_{m-1} = \alpha - \frac{3-m}{m-1}$
 - $\delta_m = \alpha - 1$.

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a $T^l(x) = x + \sum_{i=1}^m N_i(x, l) \delta_i$ où $N_i(x, l) = \#\{0 \leq k \leq l-1 : T^k x \in I_i\}$. Par conséquent $T^l(x) = x + \frac{p_l(x)}{m-1} + l\alpha$ avec $p_l(x) \in \mathbb{Z}$.

L'échange T vérifie la condition idoc, en effet :

- Les orbites des points de discontinuité de T sont infinies :

S'il existe $a \in D(T)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ telsque $T^n(a) = a$, alors $p_l(a) + n\alpha = 0$, ceci est absurde par irrationalité de α .

- Les orbites des points de $D(T)$ sont distinctes :

Si deux discontinuités a_i et a_j de T sont sur une même orbite, alors il existe un entier $l > 0$ (quitte à échanger a_i et a_j) tel que : $T^l(a_i) = a_j$.

Alors on aura $T^l(\frac{i}{m-1}) = \frac{j}{m-1}$ ou $T^l(1-\alpha) = \frac{j}{m-1}$ ou $T^l(\frac{i}{m-1}) = 1-\alpha$, pour $1 \leq i \neq j \leq m-2$.

Si $T^l(\frac{i}{m-1}) = \frac{j}{m-1}$ alors $\frac{p_l(\frac{i}{m-1})}{m-1} + l\alpha = \frac{j-i}{m-1}$ ce qui est impossible par irrationalité de α .

Si $T^l(\frac{i}{m-1}) = 1-\alpha$, $1 \leq i \neq j \leq m-2$ alors $\frac{p_l(\frac{i}{m-1})}{m-1} + (l+1)\alpha = 1 - \frac{i}{m-1}$, également impossible par irrationalité de α .

Le cas $T^l(1-\alpha) = \frac{j}{m-1}$ implique que $\frac{p_l(1-\alpha)}{m-1} + (l-1)\alpha = \frac{j}{m-1} - 1$, n'est possible que si $l = 1$ auquel cas, on a $T(1-\alpha) = \frac{j}{m-1} = 0$ ce qui est impossible (0 n'est pas une discontinuité de T).

Puisque la permutation π est irréductible et que T vérifie la condition idoc alors d'après le théorème de Keane, T est minimal. Comme les λ_i sont dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par 1 et α alors T est de rang 2 et donc d'après le théorème de Boshernitzan, T est uniquement ergodique.

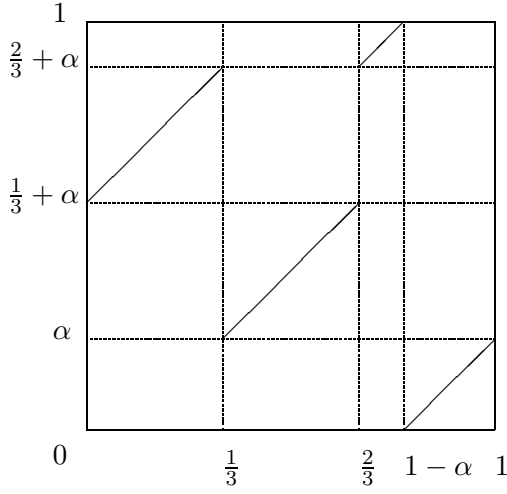
D'autre part, les δ_i s'écrivent $\delta_i = r + p_i s$ avec $r = \alpha$ et $s = \frac{1}{m-1}$, $p_i \in \mathbb{Z}$. Donc d'après la proposition 2.1 A), T admet $f(x) = \exp(2i\pi(m-1)x)$ comme fonction propre associée à la valeur propre $\exp(2i\pi(m-1)\alpha)$. On obtient le théorème 1.4 en posant $\beta = (m-1)\alpha$ et $T_\beta = T$.

Remarques. 1) Dans cette famille d'échanges d'intervalles T_β de rang 2 à un paramètre β , on voit que le non mélange faible topologique est une propriété stable, comme conjecturé par Boshernitzan dans [3].

2) Pour $m = 3$, T est un échange de 2 intervalles et $f(x) = \exp(4i\pi x)$ est une fonction propre associée à la valeur propre $\exp(4i\pi\alpha)$.

Cas particuliers.

- **m=4.** Dans ce cas, T est un échange de 4 intervalles de $[0, 1[$ de permutation associée : $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur longueur : $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \alpha, \alpha)$, où $\alpha \in]0, \frac{1}{3}[$ est un irrationnel.

*Figure 2*

On vérifie que $f(x) = \exp(6i\pi x)$ est une fonction propre continue associée à la valeur propre $\exp(6i\pi\alpha)$.

- **m = 5.** Dans ce cas, T est un échange de 5 intervalles de $[0, 1[$ de permutation associée : $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur longueur associé : $\lambda = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \alpha, \alpha)$ où $\alpha \in]0, \frac{1}{4}[$ est un irrationnel.

Le vecteur de translation δ est donné par : $\delta = (\alpha + \frac{1}{2}, \alpha, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha, \alpha - 1)$.

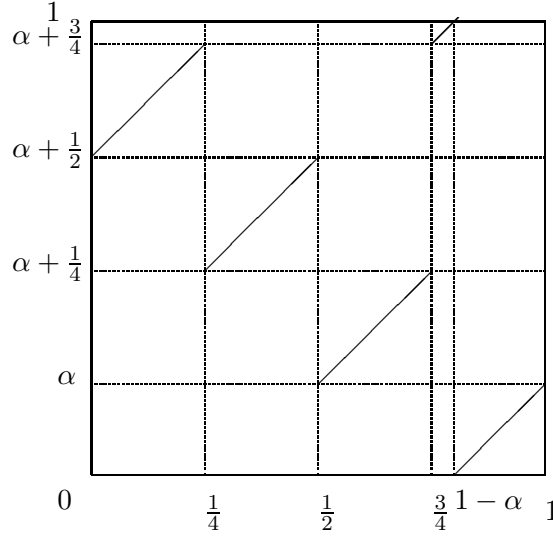


Figure 3

On vérifie alors que $f(x) = \exp(8i\pi x)$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre $\exp(8i\pi\alpha)$.

4. PREUVE DU THÉORÈME 1.5

Construction des T_α : échanges de m intervalles avec valeurs propres irrationnelles et rationnelles non triviales uniquement ergodiques ou non minimaux .

Soient $m = 2n$ un entier pair, σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$ et $\alpha \in [0, 1]$ un irrationnel. Soit T l'échange de m intervalles de $[0, n[$ défini par :

$T([i-1, i]) = [\sigma(i)-1, \sigma(i)[$ pour $i = 1, \dots, n$ et sur $[i-1, i[$ on pose

$$T(x) = \begin{cases} x + 1 - \alpha + \sigma(i) - i & \text{si } x \in [i-1, i-1 + \alpha[\\ x - \alpha + \sigma(i) - i & \text{si } x \in [i-1 + \alpha, i[. \end{cases}$$

Le vecteur longueur associé à T est $\lambda = (\alpha, 1 - \alpha, \alpha, 1 - \alpha, \dots, \alpha, 1 - \alpha)$. Donc, T est de rang 2.

Les discontinuités de T sont : $\alpha, 1, 1 + \alpha, 2, \dots, (n-1) + \alpha$.

Le vecteur translation δ est :

$$\delta_j = \begin{cases} 1 - \alpha + \sigma(i) - i & \text{si } j = 2i - 1 \text{ est impair} \\ -\alpha + \sigma(i) - i & \text{si } j = 2i \text{ est pair;} \end{cases}$$

où $j = 1, \dots, 2n$ et $i = 1, \dots, n$.

La preuve du théorème 1.5 est conséquence des lemmes 4.1 et 4.2 ci-dessous :

Lemma 4.1. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) T est uniquement ergodique
- ii) T est minimal
- iii) σ est un n -cycle

Preuve. $i) \implies ii)$: est clair (voir les propriétés des notions spectrales).

$ii) \implies i)$: résulte du fait que T est de rang 2 et du théorème de Boshernitzan.

$ii) \implies iii)$: Si σ n'est pas un n -cycle, σ contient un cycle de longueur $p < n$, donc il existe $p < n$ tel que $T^p([0, 1]) = [0, 1]$. Comme :

$$\begin{aligned} T([0, 1]) &= [\sigma(1) - 1, \sigma(1)[, \\ T^2([0, 1]) &= [\sigma^2(1) - 1, \sigma^2(1)[, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$T^{p-1}([0, 1]) = [\sigma^{p-1}(1) - 1, \sigma^{p-1}(1)[, \text{ alors}$$

$\bigcup_{k=0}^{p-1} T^k([0, 1])$ est un ensemble invariant de mesure p donc distinct de $[0, n]$. L'échange T n'est donc pas minimal.

$iii) \implies ii)$: si σ est un n -cycle, alors $\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k([0, 1]) = [0, n]$. L'application de premier retour de T sur $[0, 1]$ est la rotation irrationnelle d'angle $n(1 - \alpha)$. Par suite, T est minimal.

Lemma 4.2. a) $f(x) = \exp(2i\pi x)$ est une fonction propre de U_T de valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$.

b) $\exp(2i\pi \frac{1}{n})$ est valeur propre rationnelle de U_T .

Preuve.

a) On vérifie directement avec la proposition 2.1 A que $f(x) = \exp(2i\pi x)$ est une fonction propre associée à la valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$.

b) On voit que i vérifie $\sigma^n(i) = i$ donc on a $T^n(I_i) = I_i$, où $I_i = [i - 1, i[$ et donc la fonction

$$\phi(x) = \exp(2i\pi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \mathbb{I}_{T^k(I_1)} \right))$$

est une fonction propre associée à la valeur propre rationnelle $\exp(\frac{2i\pi}{n})$, où \mathbb{I}_J représente la fonction indicatrice de l'ensemble J .

En effet, soit $x \in I_i$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ par définition de T et puisque σ est un cycle, il existe k_i tel que $I_i = T^{k_i}(I_1)$, ainsi $x \in T^{k_i}(I_1)$ et $T(x) \in T^{k_i+1}(I_1)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \exp(2i\pi \left(\frac{k_i}{n} \mathbb{I}_{T^{k_i}(I_1)}(x) \right)) = \exp(2i\pi \frac{k_i}{n}) \quad \text{et} \\ \phi(T(x)) &= \exp(2i\pi \left(\frac{k_i+1}{n} \mathbb{I}_{T^{k_i+1}(I_1)}(T(x)) \right)) = \exp(2i\pi \frac{k_i+1}{n}) \end{aligned}$$

$$= \exp(2i\pi \frac{1}{n}) \exp(2i\pi \frac{k_i}{n}) = \exp(2i\pi \frac{1}{n}) \phi(x).$$

Exemple 1. Soit $m = 2n$ un entier pair et α un irrationnel. Soit σ la permutation donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère T l'échange de m intervalles de $[0, n[$ construit comme au début de cette section 4. Puisque σ est un n -cycle, alors d'après le lemme 4.1, l'échange T est uniquement ergodique. La fonction $f(x) = \exp(2i\pi x)$ est une fonction propre de U_T associée à la valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$, d'après le lemme 4.2 a. Pour $m = 12$, on a la figure ci-dessous :

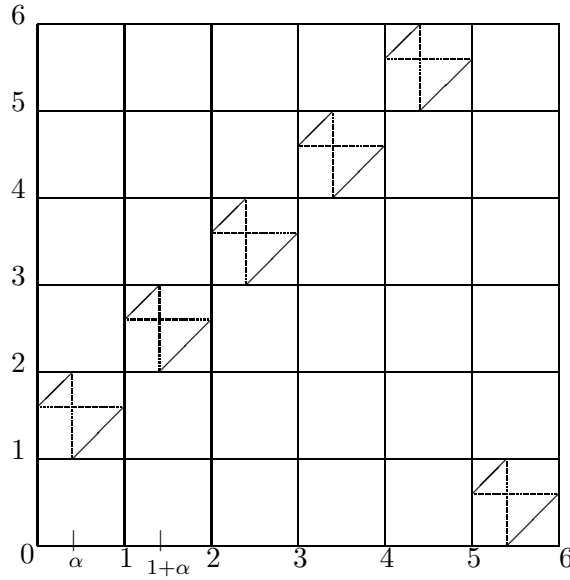


Figure 4

Exemple 2

Soit $m = 2n$ ($n \geq 1$) et T l'échange de m intervalles de $I^n = [0, n[$ correspondant à la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- La permutation π associée à T est : $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ m & m-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Le vecteur longueur associé est : $\lambda = (\alpha, 1 - \alpha, \alpha, 1 - \alpha, \dots, \alpha, 1 - \alpha)$.
- Les discontinuités de T sont : $\alpha, 1, 1 + \alpha, 2, \dots, (n-1) + \alpha$.
- Les translations de T sont : $\delta_i = (n - i + 1) - \alpha$, $1 \leq i \leq m$.
- Les images des discontinuités de T sont : $0, 1 - \alpha, 1, 2 - \alpha, 2, \dots, n - \alpha$.

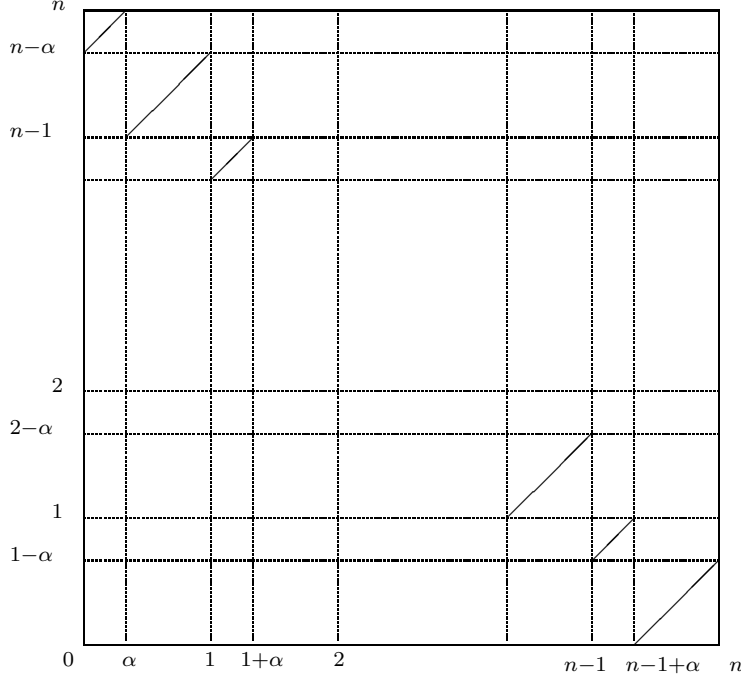


Figure 5

Pour $n \geq 3$, T n'est pas minimal car $T([0, 1] \cup [n-1, n]) = [0, 1] \cup [n-1, n]$, aussi car σ n'est pas un n -cycle. D'autre part, puisque $\delta_i = -\alpha + (n-i+1)$, $1 \leq i \leq m$, donc T vérifie les conditions de la proposition 2.1.A) avec $r = -\alpha$ et $s = 1$. Par suite, $f(x) = \exp(2i\pi x)$ est une fonction propre associée à la valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$.

Remarque. Dans cette famille (T_α) à un paramètre α d'échanges d'intervalles de rang 2, on voit que le non mélange faible topologique et l'existence d'une valeur propre rationnelle non triviale $\exp(2i\pi \frac{1}{n})$ sont des propriétés stables, comme conjecturé dans [3].

- Cas $n = 2$: Echanges de 4 intervalles.

Dans ce cas, la permutation $\sigma = (21)$ est un 2-cycle, donc par le lemme 4.1 T est uniquement ergodique. Par contre, T ne vérifie pas la condition idoc car $T(\alpha) = \frac{1}{2}$. En divisant les longueurs par 2 afin de se placer sur $I = [0, 1[$ et en changeant $\frac{\alpha}{2}$ par α , on obtient :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda = (\alpha, \frac{1}{2} - \alpha, \alpha, \frac{1}{2} - \alpha). \text{ D'où}$$

$$T(x) = \begin{cases} x + 1 - \alpha & \text{si } x \in [0, \alpha[\\ x + \frac{1}{2} - \alpha & \text{si } x \in [\alpha, \frac{1}{2}[\\ x - \alpha & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \alpha[\\ x - \alpha - \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \alpha, 1[\end{cases}$$

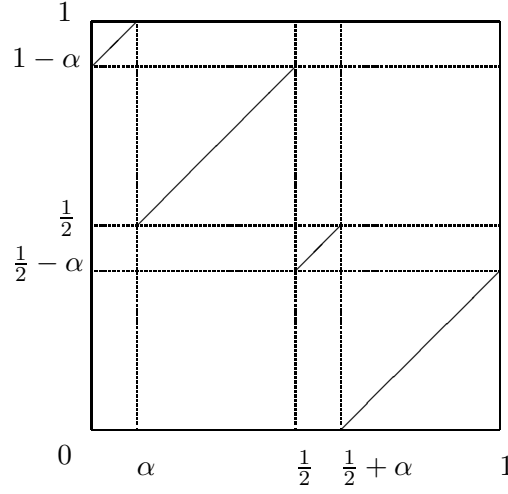


Figure 6

On vérifie directement que $f(x) = \exp(4i\pi x)$ est une fonction propre de U_T de valeur propre $\exp(-4i\pi\alpha)$ et que $\exp(i\pi)$ est valeur propre puisque $T^2([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{1}{2}]$.

RÉFÉRENCES

1. A. Avila, G. Forni, *Weak mixing for interval exchange maps and translation flows*. A paraître Ann. of Math.
2. P. Arnoux, *Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une translation sur le tore*. Bull SMF 116 (1988), 489-500.
3. M.D. Boshernitzan, *Rank two interval exchange transformation*. Ergod Th and Dynam.Sys. 8 (1988), 379-394.
4. S. Ferenczi, L. Zamboni, *Examples of 4 interval exchange transformations*. Preprint (2006)
5. A. Katok, A. Stepin, *Approximations in ergodic theory*. Russian math. surveys 22,5 (1967) 76-102.
6. M. Keane, *Interval exchange transformations*. Math. Z. 141 (1975), 25-31.
7. M. Keane, *Non-ergodic Interval exchange transformations*. Isr. Jour. Math., 2 (1977), 188-196.
8. A. Nogueira, D. Rudolph, *Topological weak mixing of interval exchange maps*. Ergod Th and Dynam. Sys. 17 (1997), 1183-1209.
9. W. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*. Ann. of Math. (2) 115 (1982), no. 1, 201-242.
10. W. Veech, *The metric theory of interval exchange transformations. I. Generic spectral properties*. Amer. J. Math. 106 (1984), no. 6, 1331-1359.

Remerciements. Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux professeurs Isabelle Liousse et Habib Marzougui pour leurs encouragements et leurs aides.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, FACULTÉ DES SCIENCES DE BIZERTE, 7021 JARZOUNA, BIZERTE, TUNISIE